ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ЗМІНИ ВОЛОГОСТІ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МІСЦЬ РОЗТАШУВАННЯ ВОЛОГОМІРІВ

Харламова Ю. М., Корсун В. І.
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,
49005, м. Дніпро, проспект Дмитра Яворницького,19
e-mail: harlamyshka@yandex.ua, KorsunV@nmu.org.ua

Вступ. Часто під час використання пористого матеріалу у практичній діяльності виникає необхідність оцінки рівня вологості в різних його частинах. Для цього використовуються різні підходи.

Ці підходи орієнтуються в основному на ідеологію довільного місця розташування сенсорів для вимірювання рівня вологості пористого матеріалу.

Проте, наприклад, у прокатному виробництві досить давно запропоновано ідею і здійснено практичну реалізацію розташування сенсорів для вимірювання нестабільної температури на поверхні прокату на основі рекомендацій теорії спостереження за станом об’єкта з розподіленими параметрами.

Метою даної роботи є демонстрація того, як використовуючи ідеологію теорії спостережуваності, досить раціонально розташовувати сенсори для вимірювання рівня вологості пористого матеріалу в нестабільних умовах.

Виклад основного матеріалу.

Найбільш загальний тип процесів тепло- і масопереносу описується рівняннями с частинними похідними другого порядку. Досить широке розповсюдження зазначених вище рівнянь і визначає практичне значення відповідних методів оцінки стану об’єктів з розподіленими параметрами.

Далі будемо розглядати клас математичних моделей цих об’єктів, які мають вигляд:

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, y; t) \qquad (1)$$

початковою

$$u(x, y, t) = 0 \qquad (2)$$

та граничними

$$u(0, y; t) = u(p, y; t) = u(x, 0; t) = u(x, s; t) = 0 \qquad (3)$$

умовами, параметр a^2 визначається властивостями конкретного пористого матеріалу. У свою чергу, функція $f(x, y; t)$ описує інтенсивність впливу зовнішньої вологи на пористу прямокутну пластинку розмірів $p \times s$.

Якщо шукати розв’язок задачі (1) – (3) у вигляді подвійного ряду

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t), \qquad (4)$$

то, підставивши цей ряд і ряд

$$f(x,y;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)Y_n(y)f_{kn}(t) \tag{5}$$

в рівняння (1), отримаємо, що воно виконується, якщо будуть однаковими члени рядів з однаковими номерами у правій і лівій його частинах:

$$\begin{aligned}X_k(x)Y_n(y)T'_{kn}(t)=X_k(x)Y_n(y)f_{kn}(t)+\\+a^2\left(X''_k(x)Y_n(y)+X_k(x)Y''_n(y)\right)T_{kn}(t).\end{aligned} \tag{6}$$

Виконавши прості перетворення виразу (6) з урахуванням умов (3), отримаємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases}X''_k(x)+\mu_k X_k(x)=0,\\ X_k(0)=X_k(p)=0;\end{cases}\quad \begin{cases}Y''_n(y)+\nu_n Y_n(y)=0,\\ Y_n(0)=Y_n(s)=0\end{cases}$$

і задачу Коші:

$$\begin{cases}T'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{rn}(t),\\ T_{kn}(0)=0.\end{cases}$$

Власними значеннями перелічених вище диференціальних рівнянь є

$$\mu_k=\pi k^2/p^2,\quad \nu_n=\pi n^2/s^2,\quad \lambda_{kn}=\mu_k+\nu_n. \tag{7}$$

Їм відповідають власні функції:

$$X_k(x)=\sin(\mu_k x),\quad Y_n(y)=\sin(\nu_n y);\quad k,n=1,2,3,\dots \tag{8}$$

та рішення диференціального рівняння (1)-(3):

$$T_{kn}(t)=\int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau. \tag{9}$$

Підставивши (7) – (9) у (4), отримаємо

$$u(x,y;t)=\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{n=1}^{\infty}\sin(\mu_k x)\sin(\nu_n y)\int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau, \tag{10}$$

де

$$f_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s f(x,y;t)\sin(\mu_k x)\sin(\nu_n y)dxdy.$$

Висновки. З (10) видно, що сенсори вологості слід розташовувати у точках з координатами (x,y), де власні функції $X_k(x)$, та $Y_k(y)$, котрі описуються виразами (8), приймають значення відмінні від 0. Оскільки кількість сенсорів обмежена, то більш точну інформацію про їх розташування дає теорія спостережуваності лінійних динамічних систем.